

TRUDNE TEMATY W NAJPROSTSZY SPOSÓB. REKURENCJA

Damian Kurpiewski, Krzysztof Skowronek, Mirosława Firszt
Wydział Matematyki i Informatyki UMK
ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń
blackbat13@gmail.com

Abstract. It is a known fact that recursion is a really hard topic in a computer science. Even experienced programmers are often not able to trace and fully understand execution of a advanced recursion functions. It also seems that the idea behind the recursion is so opposed to our everyday way of thinking it makes it almost impossible to imagine it. It is no wonder that it is also a hard topic for students. In our approach we try to help them understand recursion by using innovative exercises, with and without the computers.

Wstęp

Przedmiotem rozważań jest temat "Wstęp do rekurencji" zaproponowany w ramach projektu "Trudne tematy w najprostszy sposób". Temat rekurencji sprawia szczególne trudności nie tylko uczniom, ale także i później – również studentom. Jest to zagadnienie niezwykle abstrakcyjne i trudne dla wyobraźni, co sprawia, że dla wielu osób poprawne zrozumienie rekurencji wydaje się wręcz nieosiągalne. Co więcej, sposób w jaki zazwyczaj uczona jest rekurencja sprawia, że wydaje się ona nieraz jeszcze trudniejsza, a często także sprawia wrażenie niepotrzebnej komplikacji prostych zagadnień. Spróbowaliśmy więc podejść do tego tematu inaczej. Naszym celem stało się znalezienie prostych problemów, w których rekurencja wydaje się być rozwiązaniem intuicyjnym. Poskutkowało to opracowaniem zestawu czterech lekcji, które mają pomóc uczniom w zrozumieniu tego trudnego tematu. Staraliśmy się, aby stworzyć takie przykłady i zadania, które będą nawiązywały do życia codziennego i nie wymagały wiedzy z innych dziedzin np. matematyki.

Ogólne zasady realizacji

Niezwykle istotne są wskazówki realizacyjne: naszym zdaniem temat "Wprowadzenie w rekurencję" nie powinien być realizowany wcześniej niż w klasie

VIII szkoły podstawowej. Najbardziej właściwym poziomem wydaje się tu być klasa I liceum. Temat można też zrealizować, w razie potrzeby, w wyższej klasie – z odpowiednimi modyfikacjami. Można sobie oczywiście wyobrazić wykorzystanie ćwiczeń praktycznych z pierwszej lekcji na wcześniejszym etapie szkolnym, jednak pełne przeprowadzenie tematu wymaga umiejętności myślenia abstrakcyjnego i dobrego przygotowania uczniów w zakresie wiedzy algorytmicznej. Przede wszystkim przed podejściem do tematu rekurencji uczniowie muszą być przygotowani w zakresie zrozumienia konstrukcji i wykorzystania funkcji.

Wytworzone materiały, szczególnie prezentacje, podzielić można, zarówno w przypadku tematu "Wprowadzenie w rekurencję", jak i pozostałych, na dwa rodzaje. Pierwszy z nich to materiały wspomagające, przewidziane konspektem lekcji, ćwiczenia. Sądzimy, że zasadniczo pole do zmian merytorycznych w tych materiałach jest niewielkie – mogą one być przyjęte w całości bądź odrzucone. Znaczne zmiany i adaptacje są możliwe w przypadku materiałów drugiego rodzaju – wspomagających bezpośrednią pracę nauczyciela z uczniem np. elementy wykładu, objaśnienia pojęć i ćwiczeń, a przede wszystkim scenariusz lekcji. Tu na nauczyciele spoczywa niezbywalny obowiązek dostosowania materiałów do grupy uczniów i przyjętego szczegółowego sposobu realizacji.

Wszystkie materiały do realizacji tematu, w najbardziej aktualnej swej wersji, znajdują się pod adresem <https://github.com/blackbat13/CS-HTiEW>. Objęte są licencją Creative Commons (uznanie autorstwa, na tych samych warunkach) – CC BY-SA. i można z nich korzystać.[1] Należy mieć na uwadze, że tematy wciąż ewoluują pod wpływem przeprowadzanych doświadczeń i zbieranych opinii.

Struktura realizacji tematu

Tak jak w przypadku większości z tworzonych tematów, realizacja następuje w formie czterech lekcji (jednogodzinne jednostki dydaktyczne) – wprowadzającej, ćwiczeń – tym razem jeszcze bez komputera, dalszych ćwiczeń z komputerem i ewaluacyjnej. Każda z lekcji posiada proponowany scenariusz, który musi być dostosowany przez nauczyciela do konkretnych czasów i miejsc.

Lekcja 1 – wprowadzająca. Lekcja ta polega na wykonaniu, po odpowiednim wprowadzeniu w zagadnienie przez nauczyciela (prezentacja "Rekurencja" i inne materiały drugiego rodzaju) ćwiczeń bez użycia komputera. Ćwiczenia polegają na rekurencyjnym poszukiwaniu klucza w układzie zamkniętych pudełek. Są to ćwiczenie grupowe (Sprawdź pudełka.pptx) oraz ćwiczenie do samodzielnego wykonania na lekcji (Sprawdź inne pudełka.pptx). W charakterze zadania domowego występuje zadanie z małpą poszukującą banana na drzewie (prezentacja Zadanie z małpą.pptx).

Lekcja 2 – ćwiczenia z fraktalem. Lekcję oparto na ćwiczeniach związanych z tworzeniem jednego z najprostszych fraktali, drzewa binarnego. Po sprawdzeniu zadania domowego i pokazaniu rozwiązania (prezentacja Zadanie z małpą – rozwiązanie.pptx), nauczyciel pokazuje i poleca uruchomić grę Blockly – Żółw. Uczniowie, z pomocą nauczyciela, wykonują zadania 1 do 9 (prezentacja Blockly-Żółw.pptx). Nauczyciel wprowadza funkcje w Blockly (prezentacja Blockly Żółw – Funkcje.pptx) uczniowie piszą funkcję rysującą gwiazdkę. Autorzy niniejszego zakładają zarówno wcześniejszy kontakt uczniów z systemem Blockly, jak i znajomość pojęcia, struktury i sposobu użycia funkcji.

Lekcja 3 – ćwiczenia z komputerem. Lekcja 3 poświęcona jest zaprogramowaniu i wykonaniu w systemie Blockly Drzewa Binarnego. Po zaprezentowaniu przez nauczyciela ogólnych wiadomości o fraktalach (Fraktale.pptx) nauczyciel przekazuje informacje dotyczące tworzenia drzewa binarnego, a następnie omawia algorytm (prezentacja Drzewo Binarne.pptx oraz prezentacja Drzewo Binarne – algorytm.pptx). Uczniowie implementują algorytm.

Lekcja 4 – ewaluacyjna. Lekcja ta poświęcona jest rozwiązaniu przez uczniów zadania Labirynt – podania algorytmu i wyniku. Wspomagana jest przez dwie prezentacje Zadanie z labiryntem.pptx oraz zawierającą rozwiązanie Zadanie z labiryntem – rozwiązanie.pptx. Zapis rozwiązania zadania następuje na kartce.

Wyjaśnienie ćwiczeń

Na szczególną uwagę zasługują zaproponowane w realizacji ćwiczenia. Jak można zauważyć, część z nich wymaga implementacji, pozostałe jednak realizowane są w myśl Informatyki bez komputera [2]. Tak jest w przypadku zadań przedstawianych na lekcji pierwszej, wprowadzającej. Celem tej lekcji jest nie tylko zapoznanie uczniów z pojęciem rekurencji. Po tej lekcji uczniowie mają przede wszystkim zrozumieć rekurencję, przynajmniej na tyle, na ile to możliwe po 45 minutach. Aby uczniom to zadanie ułatwić, przygotowano specjalne ćwiczenie z pudełkami. Ćwiczenie polega na rekurencyjnym przeszukiwaniu pudełek według podanego wcześniej, w ramach prezentacji, algorytmu. Pudełka mają określoną strukturę. Zaczynamy przeszukiwanie od pierwszego, największego pudełka. Otwieramy je, a w nim znajdują się kolejne, mniejsze pudełka. W nich z kolei mogą znajdować się kolejne pudełka, mogą też być one puste. W jednym z tzw. końcowych pudełek (takich, w których nie ma już kolejnych pudełek) znajduje się klucz. Klucz jest tylko jeden i należy założyć, że na pewno można go odnaleźć przeszukując całą strukturę. Celem uczniów jest wykonać algorytm na fizycznych zestawach pudełek, otwierając je w określonej kolejności, zapisując na kartce kolejność działań i rozwój stosu (na którym odkładane są wywołania rekurencyjne), szukając ukrytego klucza.

Zaprezentowane ćwiczenie ma pomóc uczniom zrozumieć nie tylko samo pojęcie, ale także jej działanie. Staraliśmy się znaleźć taki problem, w którym rozwiązanie rekurencyjne jest intuicyjne i efektywne. Właśnie dlatego postanowiliśmy wykorzystać klasyczny problem grafowy – przeszukiwanie grafu w głąb. Wspomniane wcześniej pudełko reprezentują właśnie strukturę prostego grafu.

Kolejnym, podobnym ćwiczeniem, jest zadanie domowe – zadanie z małpą. W tym ćwiczeniu mamy do czynienia z małpą chodzącą po drzewie i szukającą banana. Drzewo jest oczywiście niewielkie i przedstawione graficznie, a jego gałęzie są ponumerowane by ułatwić wykonanie zadania i śledzenie ruchów małpy. Jak łatwo zauważyć, także i w tym ćwiczeniu używamy struktury grafowej, tym razem zaprezentowanej bezpośrednio jako drzewo. Oczywiście także w zadaniu z pudełkami wykorzystany graf jest drzewem.

Podobne ćwiczenie wykorzystywane jest także na lekcji ewaluacyjnej. W tym jednak zadaniu do czynienia mamy z grafem, który nie jest drzewem i może zawierać cykle. Dla ułatwienia i lepszego zrozumienia problemu graf jest przedstawiony za pomocą algorytmu. Rzecz jasna w trakcie lekcji w ogóle nie poruszamy pojęcia grafu, nie mniej jednak w zaawansowanej grupie można o tym wspomnieć. Problem przedstawiony przed uczniami w tym zadaniu jest następujący: zaproponować algorytm przejścia przez labirynt i znalezienia skarbu, który jest w nim umieszczony. Wymagane jest, by algorytm był uniwersalny, tzn. zadziałał na dowolnym labiryncie (oczywiście takim, w którym istnieje ścieżka od punktu początkowego do skarbu). Jak można zauważyć, z racji tego, że w tym zadaniu mamy do czynienia z grafem z cyklami, uczniowie nie mogą bezpośrednio odwołać się do algorytmów przeszukiwania pudełek, czy też algorytmu małpy chodzącej po drzewie. Niemniej jednak mogą się na nich opierać, by stworzyć swój własny algorytm. Tak naprawdę najważniejszą różnicą między przeszukiwaniem drzewa, a przeszukiwaniem labiryntu, jest zapamiętywanie już odwiedzonych korytarzy, tak aby nie wpaść w pętlę.

Dość odmienny temat poruszany jest na lekcji 2 i 3, gdzie wprowadzamy pojęcie fraktalu i prezentujemy rekurencję na przykładzie rysowania drzewa binarnego. Należy w tym miejscu wspomnieć, iż pierwszym zamysłem było zaproponowanie tutaj innego fraktalu, a mianowicie Trójkąta Sierpińskiego. Wstępne doświadczenia i dyskusje pokazały jednak, że wykorzystuje on nieco odmienny rodzaj rekurencji, co sprawia uczniom duże problemy. Algorytm konstrukcji drzewa binarnego jest bardziej zbliżony do wcześniejszego przeszukiwania drzewa, co sprawia, że powinien być bardziej przystępny dla uczniów.

Pierwsze doświadczenia i wyniki

Temat "Wprowadzenie do rekurencji" zrealizowany został jak dotąd tylko raz – w drugiej klasie licealnej. Realizację można uznać za udaną, choć wnioski wskazały

na konieczność zmian w lekcji 2 i lekcji 3. W niniejszym artykule prezentujemy już ich zmienioną wersję. Materiały archiwalne można znaleźć pod podanym wcześniej adresem. Oczywiście, aby móc wiarygodnie mówić o zaletach i wadach proponowanego rozwiązania należy zebrać znacznie obszerniejszy materiał dotyczący realizacji tematu. Jednak już w tej chwili powiedzieć można, iż realizacja tematu rekurencji, jeszcze trudniejsza niż przypuszczaliśmy, budzi pewne nadzieje na przyszłość, choć zapewne, w miarę gromadzenia doświadczeń, wymagać będzie kolejnych zmian, poprawek i rozszerzeń. Pierwsze doświadczenia pokazały, że temat ten jest na tyle trudny, że należałoby rozbić go na dwie części. Pierwsza, tutaj zaprezentowana, ma na celu wprowadzić uczniów w pojęcie rekurencji. Rekurencji, w której wykonujemy już jakieś działania schodząc w głąb (jak otworzenie pudełka, czy przejście po gałęzi drzewa). Drugi temat miałby natomiast dotyczyć nieco odmiennego rodzaju rekurencji, tzw. klasycznej rekurencji, w której dopiero po zejściu na sam dół wywołań rekurencyjnych wykonywane są jakieś działania. Taki rodzaj rekurencji może być reprezentowany np. poprzez Trójkąt Sierpińskiego, czy też algorytm sortowania przez scalanie.

Literatura

1. Aktualne i archiwalne materiały projektu
<https://github.com/blackbat13/CS-HTiEW>, ostatni dostęp 09.06.2018
2. Bell T., Witten I.H., Fellows M., *Computer Science Unplugged – off-line activities and games for all ages*;
<https://classic.csunplugged.org/books/>, ostatni dostęp 09.06.2018